27. РЕГИОНАЛНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (13. март 2021)

IV РАЗРЕД

1. Систем сачињен од три тега различитих маса m_1, m_2 и m_3 налази се на два котура приказан је на слици 1. Након што систем постигне стање равнотеже, одредити масе преостала два тега користећи податке са слике 1.

2. Ако промијенимо таласну дужину упадног зрачења $x = 3$ пута, вриједност закочног напона на баријуму се повећа $y = 4$ пута. Ако црвена граница фотоелектричног ефекта на металу баријума износи $\lambda_g = 495nm,$ одредити почетну таласну дужину електромагнетног зрачења.

3. Два штапа једнаких дужина l_0 у систему референце у коме мирују, крећу се у смјеру своје дужине један другом у сусрет брзином $v,$ у односу на систем S. Одредити за колико се редукује вријеме мимоилажења два штапа услијед релативистичке контракције дужина и одредити дужину једног штапа у систему везаном за други штап.

4. Двоатомски гас $\left(C_V = (5/2)R\right)$ врши циклус који се састоји од две адијабате и две изохоре (слика 2). Одредити коефицијент корисног дејства овог циклуса ако гас максимално повећа запремину $q = 4$ пута . Колика је промјена унутрашње енергије гаса након једног циклуса?

5. Посматрајмо електронски гас сачињен од N слободних електрона у запремини V . Густину електрона (број електрона по јединици запремине) означићемо са n и дефинисати као $n = N/V$.

а) Под претпоставком да сваки електрон заузима запремину облика сфере полупречника r, одредити вриједност бездимензионог параметра r_s (Wigner-Seitz radijus), који је дефинисан као $r_s = r/a_0$, за уобичајену густину електронског гаса $n = 10^{22} cm^{-3}$. Константа $a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11} m$ је Боров радијус. Оваквом параметризацијом густина система је једнозначно одређена параметром r_s, који за већину система узима вријеност $r_s \in [2{,}10]$.

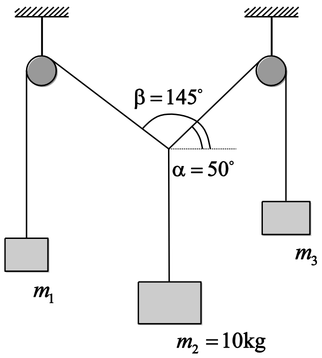
б) Одредити вриједност Winger-Seitz radijusa r_s у лимитима бесконачно велике $n \to \infty$ и бесконачно мале густине $n \to 0$

ц) Написати израз за укупну енергију електронског гаса ако су дате координате и импулси електрона, тј. $\{ \vec{r}_i, \vec{p}_i \}$ $i = 1,2,....,N.$

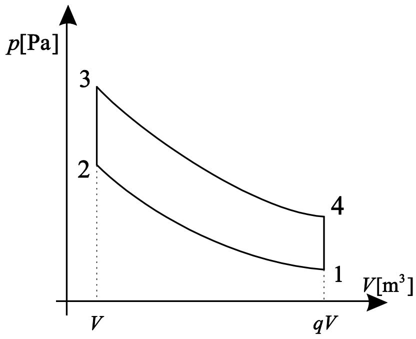
д) Користећи методе кванте механике може се доћи до израза за укупну енергију у зависности од параметра r_s : $E = \dfrac{2{,}21}{r_s^2} - \dfrac{0.916}{r_s}$, гдје је енергија дата у тзв. Хартијевим јединицама (Hartree=$E_h = 2 \cdot 13.6eV = 27{,}6eV$). Први члан представља допринос кинетичке енергије, а други представља потенцијалну енергију. Функционална зависност енергије E(r_s) од параметра r_s приказана је на слици 3. Одредити за коју вриједност параметра r_s ће се систем налазити у равнотежи.

е) За коју вриједност r_s ће кинетичка и потенцијална енергија бити једнаке по апсолутној вриједности?

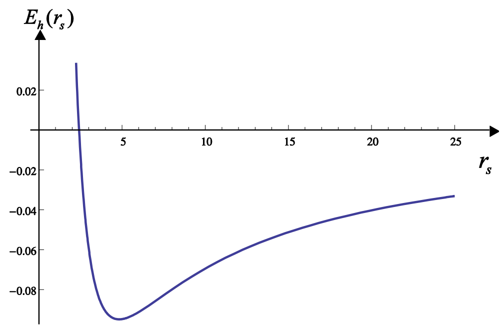
ф) Одредити који од два члана ће доминирати у лимиту великих густина $n \to \infty$ а који у лимиту $n \to 0$.



Слика 1



Слика 2

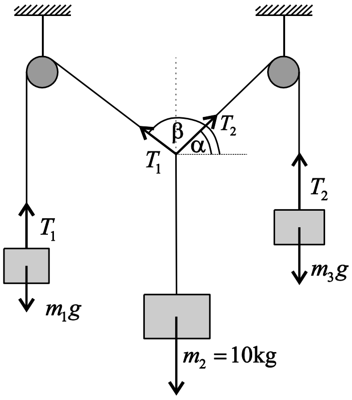


Слика 3

Задатке припремио: Зоран Шукурма
Рецензент: Проф. др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА IV РАЗРЕД

1. Пројекције сила на x и $y-osu$ су, редом: $T_1\cos(\pi-\beta)=T_2\cos\alpha \rightarrow T_2=-T_1\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$



$0=m_1g-T_1 \rightarrow T_1=m_1g$,

$m_3g-T_2 \rightarrow T_2=m_3g$

$$0=m_2g-T_1\sin\beta-T_2\sin\alpha \rightarrow m_2g=T_1\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}$$

Комбиновањем ових једначина добијамо:

$m_1=m_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=6{,}452kg$ односно

$m_3=-m_2\dfrac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=7{,}098kg$**.**

2. Једначина фотоелектичног ефекта гласи $\dfrac{hc}{\lambda}=\varphi+eU_k$. Вриједност излазног рада φ се може добити из црвене границе, гдје вриједност закоченог напона износи $U_k=0$, тако да имамо $\dfrac{hc}{\lambda_g}=\varphi$. Након редуковања таласне дужине x пута,закочни напон се повећа y пута тако да важи: $x\dfrac{hc}{\lambda}=\varphi+yeU_k$. Елиминисањем излазног рада и закочног напона из претходних једначина добијамо: $\lambda=\dfrac{y-x}{y-1}\lambda_g=\dfrac{1}{3}\lambda_g=165nm$.

3. Вријеме мимоилажења у класичном случају износи: $t_k=\dfrac{2l_0}{2v}=\dfrac{l_0}{v}=t_0$. У релативистичком слућају најпре вежемо систем референце за један од штапова. Брзина једног штапа у односу на други износ: $u=\dfrac{v+v}{1+v\cdot v/c^2}=\dfrac{2v}{1+v^2/c^2}$, тако да је дужина једног штапа, у систему другог штапа, једнака $l=l_0\sqrt{1-u^2/c^2}=l_0\sqrt{1-\dfrac{4v^2/c^2}{\left(1+v^2c^2\right)^2}}=l_0\dfrac{c^2-v^2}{c^2+v^2}$. Вријеме мимоилажења у релативистичком случају је $t_R=\dfrac{l+l_0}{u}=\dfrac{\dfrac{2l_0}{1+v^2/c^2}}{\dfrac{2v}{1+v^2/c^2}}=\dfrac{l_0}{v}=t_0=t_k$, тј. нема промјене у времену мимоилажења.

4.Коефицијент корисног дејства циклуса дефинисан је као $\eta=A/Q$ (1), гдје је А укупан рад извршен у циклусу, а Q укупна доведена топлота у систем. Рад гаса у једном циклусу је: $A=A_{12}+A_{34}=-\Delta U_{12}-\Delta U_{34}=nC_V\left(T_1-T_2+T_3-T_4\right)$(2)**.** За стања 1-2 и 3-4 (слика 2) важи: $T_1(qV)^{\gamma-1}=T_2V^{\gamma-1}iT_3V^{\gamma-1}=T_4(qV)^{\gamma-1}$, одакле слиједи: $T_2=T_1q^{\gamma-1}$ и $T_3=T_4q^{\gamma-1}$ (3) **,** гдје је $\gamma=C_P/C_V=7/5, C_P=C_V+R$. Замјеном (3) у (2) за рад гаса у једном циклусу добијамо:

$A = nC_V(T_1 - T_4)(1 - q^{\gamma-1})$(4) **.** Гас прима топлоту само у процесу 2-3 тако да имамо:
$Q = \Delta U_{23} = nC_V(T_3 - T_2) = nC_V(T_4 - T_1)q^{\gamma-1}$(5)
Замјеном (4) и (5) у формалу (1) за коефицијент корисног дејства добијамо:
$\eta = \frac{A}{Q} = 1 - q^{1-\gamma} = 42.6\%$**.** Како се ради о затвореном циклусу и идеалном гасу и без рачунања можемо закључити да нема промјене унутрашње енергије гаса, тј $\Delta U = 0$**.**

5. а) На основу дефиниције густине електрона у гасу и чињенице да укупна запремина система може написати као $V = Nv$ гдје је $v = \frac{4}{3}r^3\pi$ запремина која припада једном електрону, налазимо полупречник r као: $n = \frac{N}{V} = \frac{1}{v} = \frac{1}{\frac{4}{3}r^3\pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi n}}$

Из дефиниције наведене у тексту добијамо: $r_s = \frac{r}{a_0} = \frac{1}{a_0}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi n}} = 5.44$

б) Како r_s представља мјеру растојања између два сусједна електрона у гасу, можемо закључити да је у лимиту високе густине, растојање између електрона тежи нули, док у лимиту ниских густина, растојање између два сусједна електрона тежи ∞. До еквивалентних резултата можемо доћи и кориштењем пољедње формуле тј. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_0}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi n}} = 0$

$$\lim_{n\to 0}\frac{1}{a_0}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi n}} = \infty$$

ц) Укупна енергија једнака је суми кинетичке и потенцијале. Кулонове електростатичке енергије. Укупна кинетичка енергија T је једнака суми кинетичке енергије свих честица:

$$T = \sum_i \frac{\overset{-2}{p_i}}{2m_e}$$

Израз за укупну потенцијалну енергију добијамо тако што сумирамо по свим паровима електрона $(i, j,), i \neq j$ и подијелимо са 2 (двоструко урачунавање интерагујућих електрона i и j), тј. $V = \frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi \notin_0}\frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$**.** Наравно, искључити случај $i = j$, јер електрон не интерагује сам са собом.
д) Систем ће се налазити у равнотежи за вриједност r_s која минимизује енергије система, тј.
$\frac{dE}{dr} = 0 = -2\frac{2.21}{r_s^3} + \frac{0.916}{r_s^2} \rightarrow r_s = \frac{2\cdot 2.21}{0.916} = 4.6$

е) Тражени услов добијамо из: $E(r_s) = 0 = \frac{2.21}{r_s^2} - \frac{0.916}{r_s} \rightarrow r_s = \frac{2.21}{0.916} = 2.3$

ф) У домену ниских густина $(r_s \rightarrow \infty)$, члан $1/r_s^2$ (кинетичка енергија) опада брже него члан $1/r_s$ (потенцијална енергија), док је на високим густинама $(r_s \rightarrow 0)$ обрнута ситуација **.**