27. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (15. мај 2021.)

I РАЗРЕД

1. На тијело које се кретало константном брзином $u = 50\, m/s$ почне да дјелује сила облика $F = -20v\ [N]$, гдје је v брзина тијела. Ако је маса тијела $400\, kg$, одредите пређени пут након кога ће се тијело зауставити од почетка дјеловања дате силе.

2. Хомогени ваљак полупречника $R = 15cm$ се котрља дуж хоризонталног правца без клизања и наилази на стрму раван нагибног угла $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Нађите максималну могућу брзину v_0 која дозвољава ваљку да настави да се котрља низ стрму раван без скакања (одвајања од подлоге). Убрзање Земљине теже износи $g = 9.81\frac{m}{s^2}$.

3. За потребе овог задатка претпоставићемо да се планете (као и друга небеска тијела) у Сунчевом систему крећу по кружним путањама.

а) Уколико знамо масу Сунца и период орбите Земље око Сунца, одредите удаљеност Земље од Сунца.

б) За произвољну планету у Сунчевом систему, уз претходне претпоставке, изведите везу периода и полупречника путање. Тај закон изразите као $f(R,T) = C$ и одредите C.

в) За ове произвољне периоде и удаљености од свог центра ротације идентификујте које од њих су планете које орбитирају у Сунчевом систему: (R,T): (4500, 60000), (820, 4330), (0.67; 3.5), (јединице су дате у $10^6\ km$ и данима)

г) Уколико нека од њих није планета Сунчевог система, закључите на основу дијела б) и ц) шта је центар орбитирања таквог тијела. Дате су масе Нептуна, Јупитера и Сунца респективно: $102 * 10^{24}kg, 1900 * 10^{24}kg, 1.99 * 10^{30}kg$. Универзална гравитациона константа је $G = 6.67 * 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$

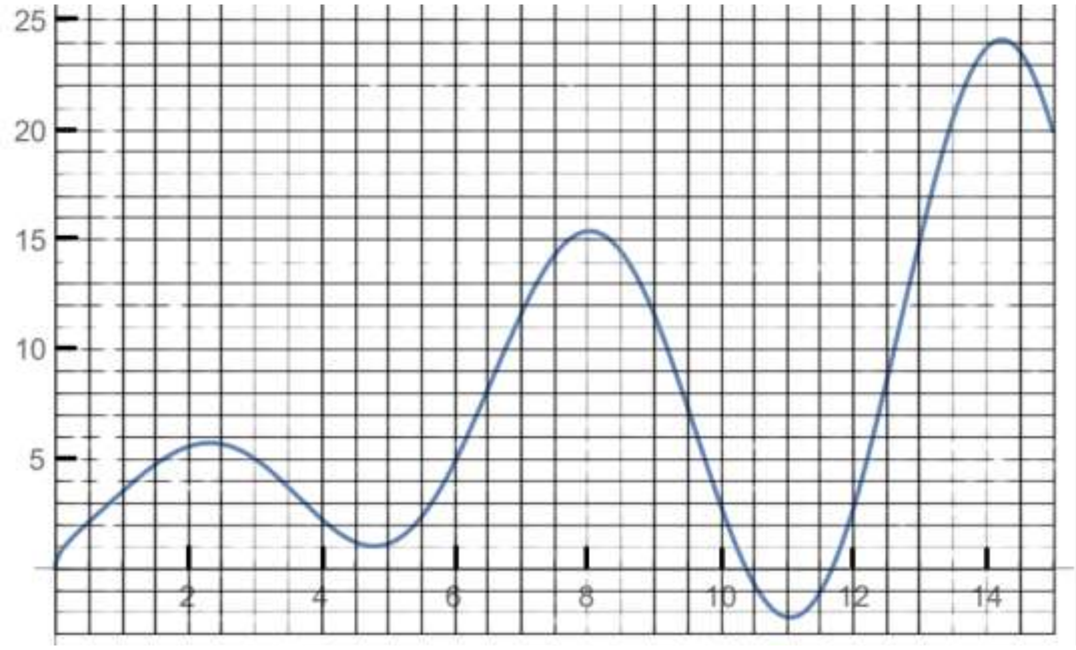
4. На слици је приказана зависност брзине материјалне тачке од времена (у једној димензији).

а) Идентификујте тачке у којима је сила која дјелује на честицу једнака нули .

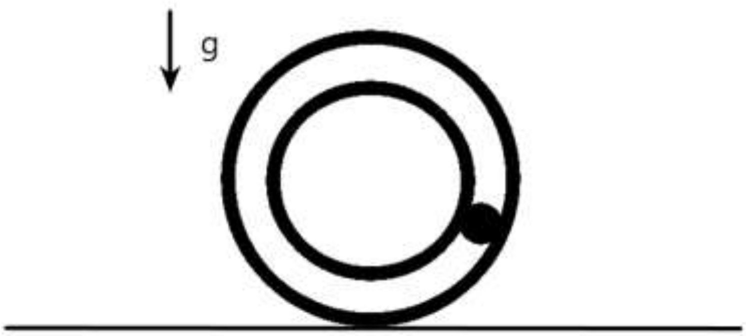
б) Процијените $a(1),\ a(7),\ a(10)$.

в) Процијените пређени пут за првих 14 секунди кретања.

5. Материјална тачка се креће унутар велике глатке затворене цилиндричне посуде у хомогеном гравитационом пољу. Знајући да је полупречник ове посуде једнак R, и висина мјерена од подлоге $\frac{R}{2}$ гдје се налази мали отвор кроз који материјална тачка напушта посуду одредите домет и максималну висину тачке у току кретања. У почетном положају налази се у највшој тачки посуде и мирује. Математичка помоћ: За квадратну једначину $ax^2 + bx + c = 0$, њена рјешења су дата као: $x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.



Слика уз задатак 4



Слика уз задатак 5

Задатке припремио: Драган Марковић, ФФ Београд
Рецензент: Проф. др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА I РАЗРЕД

1. Како нема других сила то је по II Њутновом закону: $ma = -kv, k = 20\frac{Ns}{m}$. Такође је: $m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -kv$. Проширивањем претходног израза са $\frac{\Delta s}{\Delta s}$ добијамо: $\frac{m\Delta v}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta s}v = -kv$. Како је брзина $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ добијамо: $m\Delta v = -k\Delta s, m(0-u) = -k(s-0)$. На крају, $s = \frac{mu}{k} = 1km$.

2. Једначина динамике у тренутку преласка са равне површи на стрму раван гласи: $\frac{mv_1^2}{R} + N = mgcos\beta$**.** Како нема проклизавања то је: $v = \Omega R$. Из закона одржања имамо: $\frac{I_0 v_1^2}{2R^2} - \frac{I_0 v_0^2}{2R^2} = mgR\ (1 - cos\beta)$. Но, момент инерције по Штајнеровој теореми, како ваљак ротира око свог краја је:$I_0 = mR^2 + \frac{mR^2}{2} = \frac{3mR^2}{2}$. Комбинујући ове једначине добија се:$v_0^2 = \frac{gR}{3}(7cos\beta - 4) - \frac{NR}{m}$.У граничном случају добијамо да је β максимално α и да је у граничном случају $N > 0$. Коначно је : $v_0^2 < \frac{gR}{3}(7cos\alpha - 4)$, одакле је $v_0 = 1\frac{m}{s}$.

3. а) Изједначавањем гравитационе и центрифугалне силе имамо:$\frac{Gmm_s}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R$ одакле слиједи $R = \left(\frac{GT^2 m_s}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 150 * 10^6 km$.

б) Поновићемо поступак под а) само ћемо организовати чланове онако како нам је наглашено: $R^3/T^2 = \frac{Gm_s}{4\pi^2}$. Одатле добијамо $C = \frac{Gm_s}{4\pi^2}$.

в) Како смо под б) извели закон одржања f знамо да за Земљу важи ова релација, тако да за небеска тијела која ротирају око Сунца мора важити тај закон одржања. Лако је увјерити се да је $\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \frac{R^3}{T^2}$.Треће тијело нема за центар своје ротације Сунце.

г) Вратимо се на дио а). Ту нам је једино било битно да имамо центар ротације. Рачунајући израз $\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = m_x = m_{\text{Јупитера}}$. Дакле, ради се о неком сателиту Јупитера. Напомена: Уколико такмичар изрази C, као реципрочну вриједност, дати пуне бодове на том дијелу задатка.

4. а) Повлачећи паралелне линије са t осом у тачкама гдје брзина мијења своју монотоност добијамо тражене тачке (у њима је убрзање 0). Очитавањем са графика добијамо тачке чије су координате $(2.4; 5.8), (4.8; 0.8), (8; 15{,}4), (11{,}2; -2), (14{,}4; 24)$. Коордидате смо представили у облику (t, v) у одговарајућим јединицама.

б) Како једначина тангетне на дату криву представља тренутно убрзање, треба да нацртамо три тангетне у траженим тачкама и очитамо њихове вриједности. $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, редом добијамо сљедеће парове $(\Delta t; \Delta v)$: $(1/3; 1), (1{,}9;\ 12), (1/3; -1)$, одакле лако добијамо тражена убрзања: $a(1) \approx 3\frac{m}{s^2}, a(7) \approx 6\frac{m}{s^2}, a(10) \approx -3\frac{m}{s^2}$.

в) Пређени пут се једноставно рачуна тако што апроксимирамо површину испод графика троугловима. Како нам задатак каже да процијенимо, можемо узети да су тражени троуглови једнакокраки и онда лако рачунамо пређени пут по формули: $s = \frac{vt}{2}$. По првом дијелу имамо израчунате координате брзине те је само потребно одредити распон .Имамо сљедећи низ: $s_1 = 4.8 * \frac{5.8}{2}m = 13.9m, s_2 = 5.4 * \frac{15.4}{2}m = 41.6m, s_3 = 1 * \frac{2}{2}m = 1m,$
$s_4 = 2.4 * \frac{24}{2}m = 28.8m, s_u \approx 85.3m$. Напомена: све координате бодовати уколико су у маргини ± 0.4, а убрзања ± 0.6, пређени пут ±5 уз тачну физичку интерпретацију (у

одговарајућим SI јединицама). За дупло веће маргине давати пола бодова, а изван тих маргина не бодовати.

5. Из закона одржања енергије можемо одредити брзину којом напушта посуду.
$mg2R = \frac{mgR}{2} + \frac{mv_0^2}{2},\ v_0 = \sqrt{3gR}$. Даље, за кретање косог хица треба да одредимо углове како сада имамо кретање по осама. Угао између вектора положаја честице у тренутку напуштања посуде је $\sin\alpha = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{6}$. Како је брзина тангента на вектор положаја, то је угао између v_0 и хоризонтале једнак $\beta = \frac{\pi}{3}$. Дакле наше једначине ће изгледати овако
$y = \frac{R}{2} + v_y t - \frac{gt^2}{2}, x = v_x t, v_y = v_0 sin\beta, v_x = v_0 cos\beta$. Максимална висина опет слиједи из ЗОЕ $y_m = 2R$. Но за максимални домет треба да ријешимо квадратну једначину:
$y = \frac{R}{2} + v_y t - \frac{gt^2}{2} = 0$. Једино рјешење је веће од нула $t = (\sqrt{3} + 2)\sqrt{\frac{R}{g}}$.
$x = \sqrt{3gR} * \frac{1}{2} * (\sqrt{3} + 2)\sqrt{\frac{R}{g}} = (\frac{3}{2} + \sqrt{3})R$.