29. РЕГИОНАЛНО ТАКМИЧЕЊЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (4. март 2023)

II РАЗРЕД

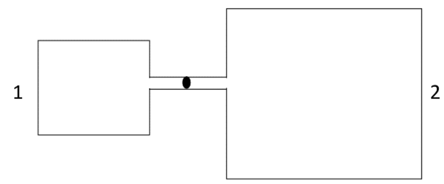
1. Ако има довољну кинетичку енергију, молекул са површине Земље може „побјећи Земљиној гравитацији“ у смислу да може да се удаљи од Земље на теоријски бесконачно растојање од ње. а) Показати да је минимална кинетичка енергија потребна за “бијег“ једнака $m_0 Rg$, гдје је m_0 маса молекула, R полупречник Земље, а g убрзање слободног пада на површини планете. б) Израчунати температуру за коју је минимална кинетичка енергија потребна за бијег једнака десетострукој средњој кинетичкој енергији молекула кисеоника O_2 . Полупречник Земље износи 6370 km, убрзање слободног пада износи 9,81 $\frac{m}{s^2}$, моларна маса молекула кисеоника је $M = 32\ g/mol$, Болцманова константа $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$ и Авогадров број $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}\ 1/mol$.

2. а) Извести израз за силу потиска која дјелује на коцку запремине V потпуно урођену у течност густине ρ, ако знамо да је убрзање Земљине теже g.
   б) Одреди минимални полупречник балона испуњеног хелијумом, при коме се балон подиже у ваздуху. Маса балона по јединици површине је $\mu = 50\ g/m^2$, атмосферски притисак је нормалан (101,3 kPa), а температура је 27 °C. Занемари притисак који је посљедица еластичних сила. Моларна маса ваздуха је $M_V = 29\ g/mol$, а хелијума $M_{He} = 4\ g/mol$. Универзална гасна константа је $R = 8{,}3\ \frac{J}{mol\cdot K}$.

3. Електрана, која има Карноову ефикасност, производи 1 GW електричне енергије из турбина које упијају пару на 500 K, а одбацују воду на 300 K у ријеку која тече. Температура воде низводно је за 6 K топлија због излаза из електране. Израчунати масени проток воде у ријеци. Специфична топлота воде је $c = 4184\ \frac{J}{kg\cdot K}$.

4. Након судара свемирског брода и астероида у свемиру, бакарни диск температуре 850°C ротира око централне осе угаоном брзином од 25 rad/s. Такав диск зрачи инфрацрвену свјетлост и хлади се до 20 °C, при чему не постоји спољашњи момент силе који дјелује на диск. а) Наћи угаону брзину диска на нижој температури. Коефицијент термичког ширења бакра је $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}\ (°C)^{-1}$. б) Нека је радијус диска на почетку (на 850 °C) био 28m, а дебљина 1,2 m. Наћи промјену кинетичке енергије диска, промјену унутрашње енергије диска и енергију коју диск израчи. Специфични топлотни капацитет бакра је 387 J/kg°C, а густина бакра на 850 °C је $8920\ kg/m^3$.

5. Посуда 1 на слици испуњена је идеалним гасом на притиску $5 \cdot 10^5$ Pa и на температури 300 K. Посуда је повезана танком цијеви (са затвореним вентилом) са посудом 2, чија је запремина четири пута већа од запремине посуде 1. Посуда 2 садржи исти идеални гас, притиска $1 \cdot 10^5$ Pa и температуре 400 K. Вентил се у једном моменту отвори да се изједначе притисци у посудама, али са условом да се температуре одржавају. Колики је притисак у посудама након изједначавања?



Задатке приремио: Доброслав Слијепчевић
Рецензент: Проф. Др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА II РАЗРЕД

1. а) Задатак се може ријешити примјеном закона о одржању енергије. Молекул на површини Земље има кинетичку енергију $E_k = \frac{m_0 v^2}{2}$ и потенцијалну енергију $E_p = -\gamma \frac{Mm_0}{R}$, гдје је М маса Земље. С друге стране, ми тражимо минималну почетну кинетичку енергију, стога ћемо за услов узети да је у бесконачности кинетичка енергија молекула једнака нули, а исто је и са потенцијалном енергијом на бесконачном растојању. Стога, пишемо једначину:

$$E_k - \gamma \frac{Mm_0}{R} = 0$$

Уз израз за убрзање Земљине теже $g = \gamma \frac{M}{R^2}$, добијамо да је $\gamma \frac{M}{R} = gR$, па је коначно

$$E_k = m_0 g R$$

б) Средња кинетичка енергија молекула је $\frac{3}{2}kT$, па можемо писати једначину:

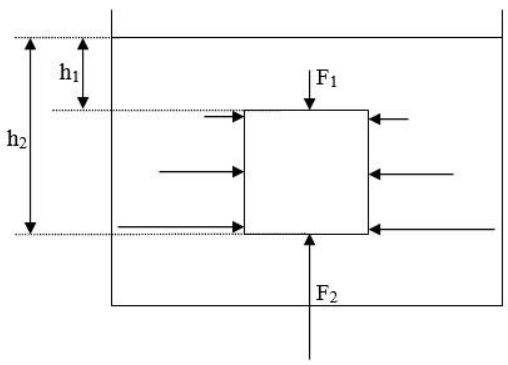
$$10 \cdot \frac{3}{2}kT = m_0 g R$$

Даље нам треба маса једног молекула кисеоника, коју можемо изразити преко Авогадровог броја моларне масе кисеоника:

$$m_0 = \frac{M}{N_A}$$

Тада је је $T = \frac{\mathrm{M}gR}{15kN_A} = 1{,}60 \ \cdot \ 10^4$ K

2.



а) Ако размотримо коцку која је потпуно потопљена у воду, тако да јој је горња страна на дубини h_1, а доња на дубини h_2, закључујемо:

1. Хидростатички притисак који дјелује на све 4 бочне стране је исти, па је укупна сила којом вода дјелује на бочне стране једнака нули. Остале су нам само горња и доња страна.

Хидростатички притисак је већи на дубини h_2, а самим тим је већа и сила F_2 којом вода дјелује навише на доњу страну коцке, него сила F_1 којом вода дјелује наниже на горњу страну коцке. Укупна сила којом вода дјелује на коцку је СИЛА ПОТИСКА, а наћи ћемо је као разлику F_2 и F_1

Означићемо ивицу коцке са a, а густину воде са ρ. Површина S и доње и горње стране тада износи a^2, хидростатички притисак на горњу страну је $\rho g h_1$, а хидростатички притисак на доњу страну је $\rho g h_2$. Како је из дефиниције притиска $F = pS$, закључујемо да је

$F_1 = \rho g h_1 a^2$ и $F_2 = \rho g h_2 a^2$.

Тада важи: $F_p = F_2 - F_1 = \rho g h_2 a^2 - \rho g h_1 a^2 = \rho g a^2 (h_2 - h_1)$

Како је $h_2 - h_1 = \ a$, коначно је:

$$F_p = \rho g a^3 = \rho g V$$

(Ученику који изведе израз додијелити, без бодовања међукорака)

б) Јасно да је да сила потиска која дјелује на балон мора бити макар једнака гравитационој сили која дјелује на балон и хелијум у њему. Стога важи:

$$\rho_V V g \geq (m_{He} + m_b) g$$

Маса балона може се изразити као $m_b = 4\pi r^2 \mu$, док масу хелијума можемо изразити као $m_{He} = \frac{M_{He} pV}{RT}$. Користећи и израз за запремину лопте $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ и израз за густину ваздуха $\rho_V = \frac{M_V p}{RT}$ добија се $\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M_V p}{RT} g \geq \left(\frac{4M_{He} p\pi r^3}{3RT} + 4\pi r^2 \mu\right) g$. Коначно, добија се: $\frac{M_V pr}{3RT} \geq \frac{M_{He} pr}{3RT} + \mu$, односно $r \geq \frac{3RT\mu}{p(M_V - M_{He})} = 14.75 \text{ cm} \approx 15 \text{ cm}$

3. Коефицијент корисног дејства Карноовог циклуса је $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{A}{Q_1}$, гдје је T_2 температура хладњака, T_1 температура гријача, А извршени рад, а Q_1 количина топлоте коју предаје гријач. Како је $A = Pt$, можемо извести да је $\frac{Q_1}{t} = \frac{PT_1}{T_1 - T_2}$. Такође, знамо да је $A = Q_1 - |Q_2|$, што дијељењем са временом t даје: $P = \frac{Q_1}{t} - \frac{|Q_2|}{t}$. Количина топлоте предата хладњаку у јединици времена, можемо наћи преко промјене температуре воде као: $\frac{|Q_2|}{t} = \frac{\Delta m}{t} c\Delta T$, па је коначно: $P = \frac{PT_1}{T_1 - T_2} - \frac{\Delta m}{t} c\Delta T$. Одатле се добија израз за масени проток воде:

$$\frac{\Delta m}{t} = \frac{PT_2}{c\Delta T(T_1 - T_2)} = 5{,}97 \cdot 10^4 \ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

4. а) Усљед промјене температуре, мијења се пречник диска, што доноси промјену момента инерције диска. С друге стране, нема спољашњих момената сила, па се момент импулса одржава! Стога је:

$$I_0\omega_0 = I\omega \ , I_0 = \frac{1}{2}mR_0^2, I = \frac{1}{2}mR^2 \ , R = R_0(1 + \alpha(t - t_0))$$

па добијамо $\frac{1}{2}mR_0^2\omega_0 = \frac{1}{2}m{R_0}^2(1 + \alpha(t - t_0))^2\omega$ и сређивањем (уз $t = 20$ ℃ и $t_0 = 850$ ℃)

$$\omega = \frac{\omega_0}{(1 + \alpha(t - t_0))^2} = 25{,}7 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

б) Почетни момент инерције диска је $I_0 = \frac{1}{2}\rho\pi R_0^2 d R_0^2 = \frac{1}{2}\pi\rho d R_0^4 = 1{,}033 \cdot 10^{10} \text{ kgm}^2$.
Промјена кинетичке енергије диска је:
$\Delta E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$ па можемо искористити $I_0\omega_0 = I\omega$ да израз сведемо на
$\Delta E_k = \frac{1}{2}I_0\omega_0(\omega - \omega_0) = 9{,}04 \cdot 10^{10}$ J , гдје закључујемо да се кинетичка енергија диска повећала. С друге стране, промјена унутрашње енергије диска је $\Delta U = mc\Delta t = \rho R_0^2 \pi dc(t - t_0) = -8{,}47 \cdot 10^{12}$ J , очекивано је смањена.
Смањење унутрашње енергије расподјелило се на повећање кинетичке енергије диска и израчену енергију. Тако је израчена енергија: $\Delta E = 8{,}47 \cdot 10^{12} \text{ J} - 9{,}04 \cdot 10^{10} \text{J} = 8{,}38 \cdot 10^{12}$ J

5. Једначине идеалног гаса прије отварања вентила су:

$p_1 V_1 = n_{m1} R T_1$ и $4p_2 V_1 = n_{m2} R T_2$, одакле се могу изразити количине гаса у свакој од посуда, $n_{m1} = p_1 V_1 / R T_1$, $n_{m2} = 4p_2 V_1 / R T_2$, као и укупна количина гаса у посудама:

$$n_m = \frac{V_1}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{4p_2}{T_2}\right)$$

Кад се вентил отвори, успоставља се притисак p, па су једначине идеалног гаса:

$pV_1 = n'_{m1}RT_1$, $4pV_1 = n'_{m2}RT_2$ из чега лако добијамо $n'_{m2} = \frac{4T_1}{T_2}n'_{m1}$ Користећи услов да се укупна количина гаса не мијења, добија се:

$n_m = n'_{m1} + n'_{m2} = n'_{m1} + \frac{4T_1}{T_2}n'_{m1} = n'_{m1}(\frac{4T_1 + T_2}{T_2})$. Тако је:

$\frac{V_1}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{4p_2}{T_2}\right) = n'_{m1}(\frac{4T_1 + T_2}{T_2})$, одакле се коначно добија израз за количину супстанце у првој посуди након отварања вентила: $n'_{m1} = \frac{V_1}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{4p_2}{T_2}\right) / (\frac{4T_1 + T_2}{T_2})$.

На крају, вратићемо се на једначину стања идеалног гаса у првој посуди након отварања вентила, и изразити притисак: $p = \frac{n'_{m1}RT_1}{V_1} = \frac{\frac{V_1}{R}\left(\frac{p_1}{T_1}+\frac{4p_2}{T_2}\right)}{\frac{4T_1 + T_2}{T_2}}\frac{RT_1}{V_1} = \frac{\left(\frac{p_1}{T_1}+\frac{4p_2}{T_2}\right)T_1\, T_2}{4T_1 + T_2} = 2 \cdot\ 10^5\text{Pa}$.