29. РЕГИОНАЛНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (4. март 2023)

III РАЗРЕД

1. Нека се масивна честица масе M креће дуж x-осе брзином V. У тренутку $t = 0$ она се распада на две честице, које се разлијећу међусобно под углом од деведесет степени. Знајући да је једна честица α пута масивнија од друге, одредити угао у односу на x-осу под којим се масивнија честица расијала. Такође одредити за које α је овај процес уопште могућ. Претпоставити да је потребно уложити додатну енергију Q како би се овај процес десио. Занемарити гравитациону силу.

2. Посматрајмо механички талас који је суперпозиција два друга: $C(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$. Уколико је почетна брзина v_0, а почетно убрзање овог таласа a_0, одредите амплитуду, период и почетну фазу овог таласа. Такође одредити максималну брзину и убрзање овог таласа, као и вријеме када се ови максимуми достижу.

3. Дат је електрични проводник у облику жице који на температури $T_0 = 20^0C$ има дужину $l_0 = 10m$ и отпор $R_0 = 1.23\Omega$. Како струја тече кроз жицу она се загријава до температуре $T = 100^0C$. Знајући да је коефицијент линеарне топлотне експанзије $\alpha_l = 2.43 \cdot 10^{-3}K^{-1}$ термички коефицијент електричне отпорности $\alpha_R = 3.92 \cdot 10^{-3}K^{-1}$, одредити отпорност жице на температури T? Жицу посматрати као идеални ваљак.

4. Наелектрисана честица наелектрисања $q > 0$ и масе m креће се почетном брзином v_0. У тренутку $t = 0$, укључе се хомогено електрично и магнетно поље дуж z-осе. Доказати да је кинетичка енергија честице у xy-равни одржана током времена, односно $E_{kx}(t) + E_{ky}(t) = \frac{1}{2}mv_0^2$. Интензитети електричног и магнетног поља су $E, B > 0$, респективно. Такође, скицирати путању честице и објаснити поступак. Помоћ: претпоставити да је рјешење за брзину облика: $v_x(t) = v_0 cos\,(\omega t)$. Објаснити зашто је ово оправдано!

5. Мјехур од сапунице, испуњен је идеалним гасом, лебди у истом идеалном гасу. Уколико је притисак околине p_0, температура гаса T, а температура околине T_0, одредите моларну масу гаса. Такође су познати: густина сапунице ρ, полупречник мјехура: r, коефицијент површинског напона σ је и дебљина опне је d. Универзална гасна константа је R. Можете претпоставити да је $d \ll r$.

Задатке припремио: Драган Марковић, ФФ Београд
Рецензент: Проф. др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА III РАЗРЕД

1. Поставка система нам омогућава да ефективно примјенимо три закона одржања: ЗОЕ, ЗОИ и ЗОМ. Закон о одржању масе је $M = \alpha m + m = (\alpha + 1)m$. Из ЗОЕ и ЗОИ добијамо сљедеће једначине: $\frac{MV^2}{2} = \frac{\alpha m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} - Q$; $MV = \alpha m v_1 cos\theta + m v_2 cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, $\alpha m v_1 sin\theta = m v_2 sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. Један начин рјешавања је комбиновање друге и треће једначине, гдје се добија: $v_2 = V(\alpha + 1)sin\theta$ **,** $v_1 = V\frac{\alpha+1}{\alpha}cos\theta$. Увршtавањем у прву једначину добија се израз $sin\theta = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{Q\alpha}{MV^2} - \frac{1}{\alpha}\right)}$. Израз под коријеном мора бити већи од нуле , дакле услов да би се овај процес уопште одиграо је $\alpha > \sqrt{\frac{MV^2}{Q}} > 1$ **.**

2. Потребно је написати горњи талас у облику: $C(t) = D \cdot cos(\omega t - \varphi)$. Користећи тригонометријски идентитет: $cos\, cos\,(\alpha - \beta) = cos\alpha\, cos\beta + sin\alpha\, sin\beta$, налазимо да је $A = Dcos\varphi, B = Dsin\varphi$, тако да је $D = \sqrt{A^2 + B^2}$, односно $cos\varphi = A/\sqrt{A^2 + B^2}$. Према томе, $C(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\,cos(\omega t - \varphi)$. Одавдје закључујемо да је амплитуда једнака: $\sqrt{A^2 + B^2}$, период: $2\pi/\omega$ и почетна фаза: $\varphi = arccos(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}})$. Брзина је дата као:$v(t) = -\omega D sin(\omega t - \varphi)$, одакле је $v_0 = B\omega$, док је убрзање:$a(t) = -\omega^2 D cos(\omega t - \varphi)$, те је $a(0) = a_0 = -A\omega^2$. Коначно, амплитуда износи: $\sqrt{{a_0}^2/\omega^4 + {v_0}^2/\omega^2}$. Максимална брзина се достиже за $\omega t - \varphi = 3\pi/2$. Тада је брзина једнака $\sqrt{{a_0}^2/\omega^2 + {v_0}^2}$. Максимално убрзање се добија за $\omega t - \varphi = \pi$ и оно износи: $\sqrt{{a_0}^2 + \omega^2 {v_0}^2}$.

3. Закон линеарног ширења је дат са: $l = l_0(1 + \alpha_l(T - T_0))$, док је закон промјене отрпоности приликом повећања температуре дата са: $\rho = \rho_0(1 + \alpha_R(T - T_0))$. Како посматрамо жицу као иделан ваљак, тада морамо да узмемо у обзир и скалирање попречног пресјека . Скалирање је дато као квадратна поправка: $S = S_0\big(1 + \alpha_l(T - T_0)\big)^2$. Израз за отпор жице је $R_0 = \rho_0\frac{l_0}{S_0}$. На температури T имамо да је:

$R = \rho_0(1 + \alpha_R(T - T_0))\; l_0(1 + \alpha_l(T - T_0))/S_0\big(1 + \alpha_l(T - T_0)\big)^2 = R_0\,(1 + \alpha_R(T - T_0))/\big(1 + \alpha_l(T - T_0)\big) \approx 1.35\Omega.$

4. Прво, битно је претпоставити да имамо све три компоненте брзине, тј. $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Лоренцова сила дата је обрасцем: $\vec{F} = q\big(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\big) = q\big(E\overrightarrow{e_z} + Bv_y\overrightarrow{e_x} - Bv_x\overrightarrow{e_y}\big) = m(\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} + \overrightarrow{a_z})$. Добијамо: $ma_z = qE, ma_y = -qBv_x, ma_x = qBv_y$**.** Видимо да је прва једначина представља равномјерно праволинијско кретање, тако да је $z(t) = \frac{qE}{2m}t^2$. Ако посматрамо промјену друге једначине у неком временском интервалу Δt, добијамо: $m\frac{\Delta a_x}{\Delta t} = qBa_y = -\frac{q^2B^2}{m}v_x$**.** Ово је једначина линеарног хармонијског осцилатора (само што сада улогу позиције игра брзина) тако да је: $v_x(t) = v_0 cos\,(\omega t)$, гдје је $\omega = \frac{qB}{m}$. Такође знамо колико је $a_x = -\,\omega v_0 sin\,(\omega t)$. Одавдје директно добијамо $v_y(t) = -v_0 sin\,(\omega t)$. Кинетичке енергије су $E_{xy}(t) = \frac{1}{2}m\big(v_x(t)^2 + v_y(t)^2\big) = \frac{1}{2}mv_0^2$, одакле се види да је ова величина очувана. Брзина осцилује на кружници те стога у xy-равни имамо периодично кретање, но у комбинацији са електричним пољем честица убрзава у смјеру z-осе, стога је путања спирала у смјеру казаљке на сату.

5. Како опна има двије границе то је притисак унутар мјехура:$p = p_0 + \frac{4\sigma}{r}$. Једначина идеалног гасног стања унутар мјехура је:$\left(p_0 + \frac{4\sigma}{r}\right)\frac{4}{3}r^3\pi\ = \frac{m}{M}RT$. Друга веза је дата из изједначавања силе потиска и гравитационе силе:$(m + m_o)g = \frac{4}{3}\rho_0 r^3\pi g$, гдје је $m_0 = \rho 4\pi r^2 d$ **.** Густину околине добијамо по формули: $\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}$. Комбинујући ове једначине добија се коначни израз за моларну масу $M = \frac{3\rho dRTT_0}{p_0 r(T - T_0) - 4\sigma T_0}$.