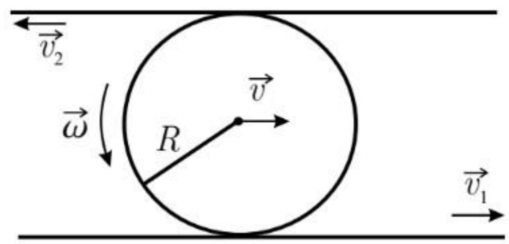
29. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (29. април 2023)

I РАЗРЕД

1. Ваљак полупречника R налази се између двије паралелне хоризонталне равни које се у односу на непокретног посматрача крећу брзинама $\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_2}$ дуж истог правца али супротних смјерова. Ако ваљак не проклизава, одредити интензитет његове угаоне брзине $\vec{\omega}$, као и интензитет и смјер брзине центра ваљка $\vec{v}$ у односу на непокретног посматрача.



2. Хомогени ваљак мирује на стрмој равни нагибног угла θ. На ваљак је наслоњена хомогена кугла направљена од другог материјала, исте масе и полупречника. У неком тренутку тијела почну да се котрљају без проклизавања низ стрму раван тако да су непрекидно у међусобном контакту. Ако је коефицијент трења између ваљка и кугле μ, одредити убрзање система тијела у односу на подлогу. Напомена: Током кретања осе ротације кугле и ваљка остају у истој равни и не мијењају правац.

3. Куглица масе m креће по хоризонталној храпавој подлози и у једном тренутку се чеоно и нееластично судара са блоком масе $2m$ који мирује на подлози. Након судара, куглица се одбија у супротном смјеру у односу на почетни смјер кретања. Коефицијент трења између подлоге и оба тијела је исти. Пут који блок пређе након судара је $n \geq 4$ пута већи од пута који пређе куглица од тренутка судара до заустављања. Одредити релативни губитак кинетичке енергије при овом судару?

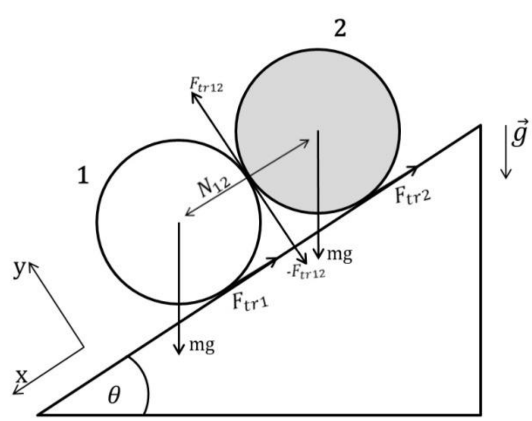
4. У тјеменима квадрата странице a налазе се честице масе m. Како се честице крећу ако узмемо у обзир само гравитациону интеракцију? Колико времена прође прије него што се честице сударе?

5. Ватрометна ракета испали се вертикално увис и тачно на врху своје путање експлодира у n једнаких дијелова. Један дио ракете одлети директно према доље и падне на земљу t_1 секунди након експлозије. Сви остали дијелови падну истовремено t_2 секунди након експлозије. На којој висини се десила експлозија?

Рјешења задатака за 1. разред

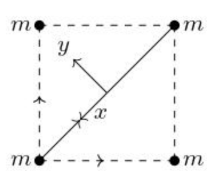
1. У односу на посматрача који мирује интензитет брзине тачке додира ваљка и доње плоче је $v + \omega R$, а пошто нема проклизавања важи $v_1 = v + \omega R$. Слично се показује да затачку додира ваљка са горњом плочом важи $v_2 = -v + \omega R$. Сабирањем датих једначина добијамо $v_1 + v_2 = 2\omega R \ \rightarrow \omega = \frac{v_1+v_2}{2R}$ док одузимањем добијамо $v_1 - v_2 = 2v \ \rightarrow \ v = \frac{v_1-v_2}{2}$. За $v_1 > v_2$ брзина $\vec{v}$ ће имати смјер приказан на слици уз задатак док за $v_1 < v_2$ смјер ће бити супротан. За $v_1 = v_2$ центар ваљка ће мировати.

2. Најприје поставимо координатни систем као што је приказано на слици приложеној уз задатак. На основу Другог Њутновог закона за транслаторно кретање ваљка дуж x-осе важи $ma_1 = mgsin\theta + N_{12} - F_{tr1}$, гдје је a_1 убрзање ваљка, N_{12} сила реакције између ваљка и кугле а F_{tr1} сила трења између ваљка и подлоге. На основу основног закона динамике ротације за ваљак важи: $I_1\alpha_1 = (F_{tr1} - F_{tr12})R$, гдје је $I_1 = \frac{1}{2}mR^2$ момент инерције ваљка, α_1 угаоно убрзање ваљка, R полупречник ваљка а F_{tr12} сила трења између ваљка и кугле. За динамику кугле важе аналогне релације $ma_2 = mgsin\theta - N_{21} - F_{tr2}$ и $I_2\alpha_2 = (F_{tr2} - F_{tr12})R$, гдје је $I_2 = \frac{2}{5}mR^2$ момент инерције кугле. Пошто су тијела у непрекидном контакту и нема проклизавања важи $a_1 = a_2 = a$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \frac{a}{R}$. Такође на основу Трећег Њутновог закона важи $N_{12} = N_{21}$. Када то искористимо једначине за транслацију постају $ma \ = mgsin\theta + N_{12} - F_{tr1}$, $ma = mgsin\theta - N_{12} - F_{tr2}$,а једначине за ротацију $\frac{1}{2}ma = F_{tr1} - F_{tr12}$, $\frac{2}{5}ma = F_{tr2} - F_{tr12}$. Сабирањем једначина за транслацију добија се $F_{tr1} + F_{tr2} = 2m(gsin\theta - a)$ а одузимњем једначина за ротацију $F_{tr1} - F_{tr2} = \frac{1}{10}ma$. Из добијеног система једначина можемо изразити силе трења као $F_{tr1} = m(gsin\theta - a) + \frac{1}{20}ma$, $F_{tr2} = m(gsin\theta - a) - \frac{1}{20}ma$. Сабирањем једначина за ротацију добијамо $F_{tr12} = \frac{F_{tr1}+F_{tr2}}{2} - \frac{9}{20}ma = m(gsin\theta - a) - \frac{9}{20}ma.$ Одузимњем једначина за транслацију добијамо $N_{12} = \frac{F_{tr1}-F_{tr2}}{2} = \frac{1}{20}ma$. Користећи $F_{tr12} = \mu N_{12}$ добијамо $m(gsin\theta - a) - \frac{9}{20}ma = \frac{\mu}{20}ma$. Одатле се добија $a = \frac{20gsin\theta}{29+\mu}$.



3. Нека је брзина куглица прије судара била v_1 и нека су интензитети брзина куглице и блока након судара $v_1^{'}, v_2^{'}$, респективно. На основу закона одржања имуплса при судару важи $mv_1 = -mv_1^{'} + 2mv_2^{'} \rightarrow v_1 = -v_1^{'} + 2v_2^{'}$. Након судара оба тијела се крећу равномјерно успорено, успорењем $a_1 = a_2 = -\mu g$. За равномјерно успорено кретање важи $v^2 = {v_0}^2 - 2\mu g s$, одакле добијамо $s = \frac{{v_0}^2}{2\mu g}$. Одатле слиједи $n\frac{{v_1^{'}}^2}{2\mu g} = \frac{{v_2^{'}}^2}{2\mu g} \rightarrow v_1^{'} = \frac{v_2^{'}}{\sqrt{n}}$. Дакле добијамо $v_1^{'} = \frac{v_1}{2\sqrt{n}-1}$, $v_2^{'} = \frac{v_1\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$. Кинетичка енергија која се изгуби при сударује $\Delta E = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - \left(\frac{1}{2}m{v_1^{'}}^2 + m{v_2^{'}}^2\right) = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - \left(\frac{1}{2}m\left(\frac{v_1}{2\sqrt{n}-1}\right)^2 + m\left(\frac{v_1\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}\right)^2\right) = \frac{m{v_1}^2}{2}\left(1 - \frac{1+2n}{\left(2\sqrt{n}-1\right)^2}\right)$. Одатле слиједи $\frac{\Delta E}{E} = \left(1 - \frac{1+2n}{\left(2\sqrt{n}-1\right)^2}\right)$.

4. На слици су приказане силе које дјелују на једну честицу. Због симетрије компоненте силе дуж *y*-осе се потру. То има за посљедицу да се честице крећу ка центру квадрата и да се у сваком тренутку налазе у тјеменима квадрата чија се дужина странице смањује. На честицу дјелује само сила дуж *x*-осе интензитета $F(x) = \gamma\frac{m^2}{\sqrt{2}(x\sqrt{2})^2} + \gamma\frac{m^2}{\sqrt{2}(x\sqrt{2})^2} + \gamma\frac{m^2}{(2x)^2} = \gamma\frac{m}{x^2}(m\frac{4+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}})$. Видимо да сила има исти облик као у случају да се честица налази у пољу честице масе $M = m\frac{4+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$ која мирује у центру квадрата. Кретање честице по дужи која спаја тјеме и центар квадрата можемо схватити као кретање по дегенерисаној елипси чија је једна полуоса нула а друга $\frac{R}{2}$ гдје је $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ полупречник описане кружнице око полазног квадрата. Вријеме T до судара честица је онда заправ половина периода T_e кретања честице по датој дегенерисаној елипси. Оваква интерпретација отвара могућност поређења времена T са периодом кретања честице по некој другој путањи, рецимо кружници полупречника R. У том сличају период можемо одредити изједначавањем гравитационе и центрифугалне силе $\gamma\frac{mM}{R^2} = mR(\frac{2\pi}{T_c})^2 \rightarrow T_c = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}$. На основу Трећег Кеплеровог закона важи $(\frac{T_e}{T_c})^2 = (\frac{\frac{R}{2}}{R})^3 \rightarrow T = \frac{T_e}{2} = \frac{T_c}{2\cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{8\gamma M}} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{4\gamma(4+\sqrt{2})m}}$.



5. Када се ракета нађе на врху своје путање, непосредно прије експлозије, њен импулс је 0 . Пошто су сви дијелови ракете осим једног пали истовремено на земљу закључујемо да су вертикалне компоненте њихових почетних брзина исте. Пошто су масе свих дијелова ракете исте, на основу закона одржања импулса за вертикалну компоненту брзине дијелова ракте важи: $0 = -v_1 + (n-1)v_2$, гдје је $-v_1$ вертикална компонента брзине дијела ракете који иде директно према доље, а v_2 вертикална компонента брзине свих осталих дијелова.

Ако се екплозија деси на висини h важи: $h = v_1 t_1 + \frac{1}{2} g{t_1}^2$, $h = \frac{-v_1}{n-1} t_2 + \frac{1}{2} g{t_2}^2$. Изједначавањем добијамо $v_1 t_1 + \frac{1}{2} g{t_1}^2 = \frac{-v_1}{n-1} t_2 + \frac{1}{2} g{t_2}^2 \rightarrow v_1 \left(t_1 + \frac{t_2}{n-1}\right) = \frac{1}{2} g({t_2}^2 - {t_1}^2) \rightarrow v_1 = \frac{g({t_2}^2 - {t_1}^2)}{2\left(t_1 + \frac{t_2}{n-1}\right)}$. Када то вратимо у израз за h добијамо $h = \frac{g t_1 t_2}{2} \frac{t_2(n-1) + t_1}{t_1(n-1) + t_2}$.