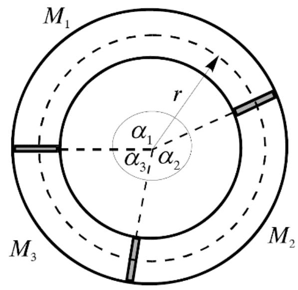
29. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (29. април 2023)

II РАЗРЕД

1. Наћи експонент адијабате за смјешу која садржи 10 g хелијума и 4g водоника (хелијум је једноатомски, а водоник двоатомски гас, моларне масе су $M_{He} = 4\ \mathrm{g/mol}$, $M_{H2} = 2\ \mathrm{g/mol}$).

2. Хомогени диск масе $m = 10\ \mathrm{kg}$ и радијуса $R = 0{,}250\ \mathrm{m}$ окреће се фреквенцијом од 300 обртаја у минути око непокретне осовине без трења. Потребно је да се диск заустави равномјерно успорено за $t = 1\ \mathrm{min}$ уз помоћ кочионе плочице, која долази у контакт са диском на средњој удаљености $r = 0{,}220\ \mathrm{m}$ од осе ротације диска. Коефицијент трења између плочице и диска је $\mu = 0{,}5$. Клип у цилиндру испуњеним кочионим флуидом пречника $d = 5\ \mathrm{cm}$ притиска кочиону плочицу на диск. Израчунати интензитет угаоног убрзања диска током кочења, интензитет силе трења која дјелује на диск током кочења као и за колико је притисак у кочионом флуиду већи од атмосферског.

3. Уска цијев, савијена у облику прстена (торуса), подијељена је на три дијела преградама које се могу помјерати без трења (слика 1). У сваком дијелу се налазе исте масе различитих гасова, моларних маса $M_1, M_2\ и\ M_3$. Одреди изразе за углове $\alpha_1, \alpha_2\ и\ \alpha_3$ које међусобно заклапају преграде у термодинамичкој равнотежи, а затим израчунај колики су ти углови у случају азота, кисеоника и хелијума? Узети да је запремина торуса $V = 2r\pi S$, гдје је r средњи полупречник торуса, а S површина нормалног пресјека торуса. Моларне масе азота, кисеоника и хелијума су, редом: $M_1 = 28\ \mathrm{g/mol}$, $M_2 = 32\ \mathrm{g/mol}$ и $M_3 = 4\ \mathrm{g/mol}$.



Слика 1

4. У овом задатку, потребно је ријешити три независна, краћа проблема из различитих области физике за други разред:

а) У океанима на Земљи има довољно воде да прекрије цијелу планету и то тако да би, да је површина Земље равна, дубина на сваком мјесту била 2,7 km. Повећана концентрација гасова стаклене баште је довела до термалног дисбаланса у атмосфери, који износи $0{,}58\ \mathrm{J/sm^2}$. Ако би сва додатна топлота била апсорбована од стране океана, процијенити колика би била промјена његове температуре након једног вијека (у ˚C)? Специфични топлотни капацитет воде у океанима је $3985\ \mathrm{J/kgK}$, а густина $1028\ \mathrm{kg/m^3}$. Узети да у години има $3{,}15 \cdot 10^7$ секунди.

б) Електрични потенцијал у дијелу простора између равни $x = 0\ и\ x = 6\ \mathrm{m}$ мијења се по закону $V = a + bx$, гдје су a, b константе чије су вриједности $a = 10\ \mathrm{V}$ и $b = -7\ \mathrm{V/m}$. Одреди интензитет, правац и смјер вектора јачине електричног поља у тачкама $A(x = 1\ \mathrm{m})$, $B(x = 3\ \mathrm{m})$ и $C(x = 5\ \mathrm{m})$.

в) Жица од бакра каква се користи у типичним стамбеним зградама има површину попречног пресјека $3{,}31 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2}$. Кроз њу протиче струја од 10A. Колика је брзина дрифта (брзина усмјереног кретања) електрона у жици, ако претпоставимо да је сваки атом бакра у жици дао тачно по један слободан електрон? Густина бакра је $8{,}92\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}}$, а за вриједност Авогадровог броја узети $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$, а моларна маса бакра је $M = 63{,}5\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, $\mathrm{e} = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

5. Са велике удаљености, честица масе $2\mathrm{g}$ и наелектрисања $15\mu\mathrm{C}$ испаљена је брзином $21\ \mathrm{m/s}$ дуж x-осе према другој честици, која у почетку мирује, али је слободна да се креће. Маса друге честице је $5\mathrm{g}$ и наелектрисања $8{,}5\mu\mathrm{C}$. Кретање честица ограничено је на x-осу. Израчунати интензитет брзине сваке од честица у моменту када је растојање између њих најмање, као и колико је то растојање. Након интеракције, честице ће се опет удаљити на велику удаљеност једна од друге. Израчунати интензитете њихових брзина када се опет нађу на великој удаљености. За вриједност Кулонове константе узети $k = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$.

Задатке приремио: Доброслав Слијепчевић
Рецензент: Проф. Др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА II РАЗРЕД

1. Хелијум је једноатомски гас, водоник двоатомски, стога знамо њихове моларне капацитете при константном притиску и запремини (за хелијум $C_{V1} = \frac{3R}{2}, C_{P1} = \frac{5R}{2}$, а за водоник $C_{V2} = \frac{5R}{2}, C_{P2} = \frac{7R}{2}$). Такође, количина топлоте коју бисмо предали смјеши троши се дијелом на хелијум, а дијелом на водоник, па је, генерално: $Q = Q_1 + Q_2, или\, n_m C\Delta T = n_{m1}C_1\Delta T + n_{m2}C_2\Delta T$. Даље је $C = \frac{n_{m1}C_1\Delta T + n_{m2}C_2\Delta T}{n_m\Delta T} = \frac{\frac{m_1}{M_1}C_1 + \frac{m_2}{M_2}C_2}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}}$. Увршатавањем вриједности за моларни капацитет смјеше при константном притиску добијамо: $C_p = \frac{53}{18}R$, док за моларни капацитет смјеше при константној запремини добијамо: $C_v = \frac{35}{18}R$. Коначно, експонент адијабате је: $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1{,}51$.

2. Из дате вриједности за фреквенцију обртања прије кочења, добијамо да је почетна угаона брзина диска $\omega_0 = 2\pi \cdot \frac{300}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 10\pi\frac{\text{rad}}{s}$. Интензитет угаоног убрзања диска при кочењу до заустављања је: $\alpha = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = 0{,}52\frac{\text{rad}}{s^2}$. Други Њутнов закон за ротацију даје: $M = I\alpha$, гдје је M момент силе трења који успорава ротацију диска, I је момент инерције диска, а α интензитет угаоног убрзања. Момент силе трења која успорава ротацију дат је са $M = F_{tr}r$ док је момент инерције диска $I = \frac{1}{2}mR^2$, па је интензитет силе трења која дјелује на диск: $F_{tr} = \frac{\frac{1}{2}mR^2\alpha}{r} = 0{,}74\ \text{N}$. Коначно, разлика атмосферског притиска и притиска у кочионом флуиду је дата са: $p = \frac{N}{S}$, гдје нормалну силу можемо добити из једначине за силу трења: $N = \frac{F_{tr}}{\mu}$, а површину клипа из $S = (d/2)^2\pi$, па је коначно: $p = \frac{F_{tr}}{\mu(d/2)^2\pi} = 754\ \text{Pa}$.

3. Искористићемо чињеницу да је дужина кружног лука над углом α изражeним у радијанима $l = r\alpha$, па је запремина дијела цијеви дата са $V = Sr\alpha$. Тако једначину стања за сваки од гасова можемо изразити у облику: $pV = pSr\alpha = \frac{m}{M}RT$. Будући да су гасови у равнотежи, притисци и температуре су им једнаки, па је, коначно: $M\alpha = \frac{mRT}{pSr} = \text{const}$ за сваки од гасова. Дакле, важи $M_1\alpha_1 = M_2\alpha_2 = M_3\alpha_3$, као и геометријски услов $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$. Замјенама $\alpha_2 = \frac{M_1\alpha_1}{M_2}$ и $\alpha_3 = \frac{M_1\alpha_1}{M_3}$, а затим увршатавањем у једначину геометријског услова добијамо $\alpha_1 + \frac{M_1\alpha_1}{M_2} + \frac{M_1\alpha_1}{M_3} = 2\pi$, одакле је $\alpha_1 = \frac{M_2M_3}{M_2M_3 + M_1M_3 + M_1M_2}2\pi$. Аналогно добијамо $\alpha_2 = \frac{M_1M_3}{M_2M_3 + M_1M_3 + M_1M_2}2\pi$ и $\alpha_3 = \frac{M_1M_2}{M_2M_3 + M_1M_3 + M_1M_2}2\pi$. Увршатавањем бројних вриједности за моларне масе азота, кисеоника и хелијума, добија се: $\alpha_1 = 0{,}225\pi\ \text{rad}$, $\alpha_2 = 0{,}197\pi\ \text{rad}$, $\alpha_3 = 1{,}577\pi\ \text{rad}$.

4. а) Топлота апсорбована кроз површину S због термалног дисбаланса γ током једног вијека (гдје је t једна година) може се изразити као $Q = 100\gamma St$. Ако ту топлоту апсорбује океан запремине $V = Sh$, специфичног топлотног капацитета c, и густине ρ, можемо је изразити као $Q = \rho Shc\Delta T$. Одатле је $\Delta T = \frac{100\gamma St}{\rho Shc} = 0{,}165℃$.

б) Потенцијал зависи само од координате x, па можемо закључити да су равни паралелне yz равни еквипотенцијалне, што значи да је правац електричног поља стално паралелан x оси. Како је $V_1 = a + bx_1$ и $V_2 = a + bx_2$, тада је напон између двије тачке $U = b(x_1 - x_2) = \mathrm{const} \cdot (x_1 - x_2)$ што је аналогно једначини $U = Ed$ за хомогено електрично поље. Тако закључујемо да важи: $E = |b| = 7\,V/m$ за било коју тачку у области. Потенцијал опада са порастом координате x, а како су линије електричног поља усмјерене од тачака вишег потенцијала ка тачкама нижег потенцијала, закључујемо да је смјер електричног поља у позитивном смјеру x осе.

в) Густина струје, дефинисана као $j = I/S$ може се изразити и као $j = nev$, гдје је n концентрација електрона, e наелектрисање електрона, а v брзина дрифта па је $v = \frac{I}{Sne}$. Концентрација је дефинисана као $n = \frac{N}{V}$, тј број електрона по јединици запремине. Како је број електрона једнак броју атома бакра, можемо искористити једначине $N = \frac{m}{M} N_A$ и $\rho = m/V$ да добијемо $n = \rho N_A / M$ и коначно:
$v = \frac{IM}{\rho N_A S e} = 2{,}23 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}$.

5. Растојање између честица биће најкраће када обје честице буду имале исту брзину v. Задатак је најлакше ријешити користећи закон одржања енергије и импулса. У почетном тренутку, како су честице веома далеко једна од друге, можемо апроксимирати укупну енергију система као кинетичку енергију прве честице. У моменту када су честице на најкраћем растојању d и имају исту брзину v, укупна енергија система је збир кинетичких енергија честица и њихове узајамне електростатичке потенцијалне енергије. Такође, укупан импулс система мора се одржати, па пишемо: $m_1 v_0 = m_1 v + m_2 v$, $\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + k\frac{q_1 q_2}{d}$.
Одавде добијамо да је $v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ и $d = 3{,}64$ m.

Прва честица у једном тренутку мијења смјер кретања и почиње да се креће супротно свом првобитном смјеру. Закони одржања важе и када се честице опет нађу на великој удаљености, па за одржање импулса имамо: $m_1 v_0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2$, гдје знак минус у другом положају прве честице показује њену промјену смјера, док за одржање енергије имамо: $\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2}^2}{2}$ будући да се и у почетном и у крајњем тренутку потенцијална енергија интеракције честица може занемарити. Рјешавањем система (појавиће се квадратна једначина гдје се узима рјешење које има физички смисао) добија се $v_1 = 9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ и $v_2 = 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.